УДК 531.44

© 2016 г. Г. М. Розенблат

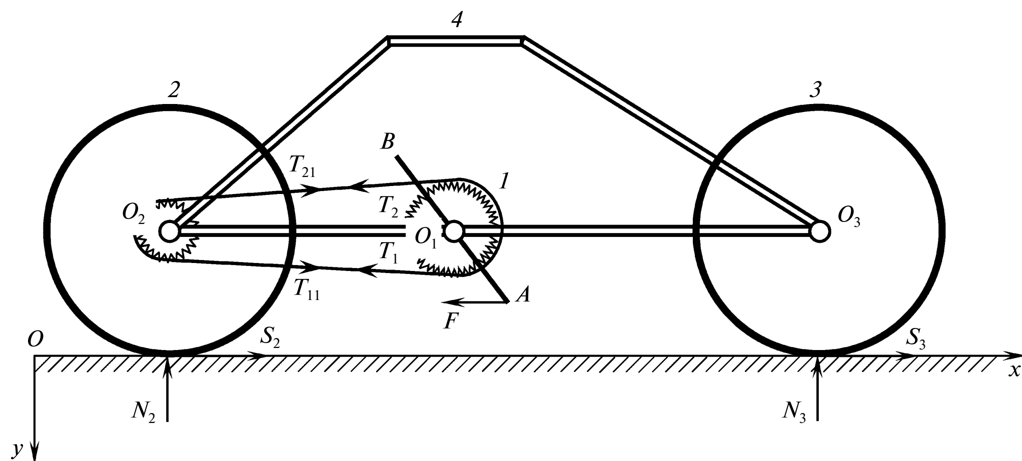
ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ДВИЖЕНИИ ВЕЛОСИПЕДА

Рассматривается движение вертикально расположенного велосипеда при действии приложенной к его педали горизонтальной управляющей силы, которая может быть, как внутренней, так и внешней по отношению к велосипеду. В точках контакта колес с горизонтальной опорной плоскостью действуют касательные силы сухого трения, подчиняющиеся закону Эйлера–Кулона. Связь в точках контакта колес с опорой предполагается односторонней. Решается задача об определении ускорения центра масс велосипеда и реализующихся движениях его колес (с проскальзыванием или без проскальзывания, с отрывом или без отрыва) при различных значениях параметров конструкции и управляющей силы. Обнаружены случаи неединственности движения – парадоксы Пэнлеве.

Перемещения тел при помощи изменения положений внутренних (по отношению к телу) масс происходят под действием внешних сил, которыми, как правило, являются силы трения (силы сопротивления, гидродинамические силы, силы гравитации). Создание таких эффективных (оптимальных) внешних сил обусловлено соответствующим синтезом внутренних сил, под действием которых реализуются допустимые перемещения внутренних масс ([1], с. 344). Такие задачи рассматривались (см., например, [2–7]) для целей создания робототехнических устройств. В некоторых задачах внутренние силы используются для создания переменной формы тела, перемещающегося в жидкости [8–10]. В космической динамике внутренние силы могут использоваться для управляемого изменения внешней силы тяготения, которая может такое тело удалить от Земли на как угодно большое расстояние (эффект "гравилета", см. [11], очерк 9).

Перемещение велосипеда (как и любого самодвижущегося транспортного средства) также относится к рассматриваемому классу задач о перемещении тел. Здесь внутренняя (управляющая) сила – это сила, приложенная к педали от ноги велосипедиста. Внешними силами, которые реализуют движение велосипеда, являются силы тяжести и силы реакций в точках контакта колес с дорогой.

1. Постановка и решение двух простейших задач о движении велосипеда. На фигуре изображен велосипед, перемещающийся в вертикальном положении относительно неподвижной правой системы координат $Oxyz$, выбранной следующим образом. Ось x совпадает с горизонтальной опорной прямой, вдоль которой движется велосипед, и ориентирована вправо, ось y направлена по вертикали вниз. Таким образом, вертикальная плоскость совпадает с плоскостью велосипеда и с плоскостью Oxy. Ось z направлена перпендикулярно плоскости Oxy и образует с осями x и y правую систему координат. Таким образом, ось z перпендикулярна плоскости фигуры и направлена от читателя. При таком выборе системы координат все повороты, угловые скорости и угловые ускорения тел, представленные на фигуре и осуществляющиеся по часовой стрелке, считаются положительными. Ясно, что эти повороты, угловые скорости и угловые ускорения, если на них смотреть с положительного направления оси z, в таком случае ориентированы против часовой стрелки и положительны, как это принято в



теоретической механике для пространства трех измерений. Аналогичные свойства выполняются также и для моментов сил: если сила поворачивает тело вокруг выбранной точки по часовой стрелке, с точки зрения читателя, смотрящего на фигуру, то момент такой силы относительно рассматриваемой точки является положительным, в противном случае – отрицательным. Далее, если не оговорено иное, будем считать вводимые кинематические параметры положительными в указанном выше смысле. Истинные знаки этих величин получаются в результате решения задачи.

Велосипед состоит из четырех тел: *1* – звездочка с педалями, *2* и *3* – два колеса, *4* – рама, с которой шарнирно скреплены тела *1, 2* и *3* в точках O_1, O_2 и O_3, как указано на фигуре. Предполагается, что с рамой также жестко связан и велосипедист, перемещающий велосипед вдоль горизонтальной оси x путем приложения к нижней педали A внутренней горизонтальной силы F, ориентированной против направления оси x.

Введем следующие обозначения: υ и a – скорость и ускорение центра масс велосипеда вдоль оси x, ω_i и ε_i – угловые скорости и ускорения звездочки ($i = 1$), заднего ($i = 2$) и переднего ($i = 3$) колес, I_i $(i = 1,2,3)$ – момент инерции тела i относительно собственных центров масс, $M = 1$ – общая масса велосипеда (включая велосипедиста, когда он находится на велосипеде), r_1 – радиус звездочки с педалью, r_2 – радиус звездочки на заднем колесе, $\mu = r_2/r_1$ – передаточное число, R – внешний радиус колес *2* и *3*, N_j и S_j $(j = 2,3)$ – нормальная и касательная реакции в точке контакта колеса j с дорогой, b_j $(j = 2,3)$ – расстояние от точки контакта колеса j до центра масс велосипеда по горизонтали, $b = (b_2 + b_3)/2$ – половина расстояния между точками крепления колес по горизонтали, h_0 – возвышение центра масс велосипеда (вместе с велосипедистом, когда он находится на велосипеде) над дорогой, F – сила, прикладываемая велосипедистом к нижней педали звездочки *1* и направленная по горизонтали, против положительного направления оси x, L – соответствующее плечо (т.е. расстояние от педали до горизонтали O_1O_2), $T = T_1 - T_2$ – разность модулей сил натяжения цепи, приложенных к звездочке *1*.

Рассмотрим следующие задачи (ниже предполагается, что нет проскальзывания колес).

Задача 1. В стандартной ситуации, когда приложенная велосипедистом сила F – внутренняя по отношению к указанной системе четырех тел, определить ускорение центра масс велосипеда (вместе с велосипедистом) вдоль оси x.

Задача 2. В нестандартной ситуации, когда сила F – внешняя по отношению к указанной системе четырех тел (велосипедист слез с велосипеда и прилагает силу F к нижней педали A против направления оси x или пользуется услугами внешнего помощника), определить ускорение велосипеда вдоль оси x.

В частности, в обеих задачах, если велосипед до приложения силы F покоился, то надо указать в какую сторону он начнет свое движение – по направлению силы F или против этой силы.

Решения задач. Используем теорему об изменении кинетической энергии ([12], с. 69). Учитывая, что колеса катятся без проскальзывания, а приводная цепь велосипеда нерастяжима, получим следующие кинематические соотношения

$$\omega_1 = \mu\upsilon/R, \quad \omega_2 = \omega_3 = \upsilon/R; \quad \mu = r_2/r_1 \tag{1.1}$$

Кинетическая энергия велосипеда, с использованием соотношений (1.1), вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}M_0\upsilon^2; \quad M_0 = 1 + \frac{I_1\mu^2 + I_2 + I_3}{R^2} \tag{1.2}$$

Для вычисления мощности всех внутренних и внешних сил учтем, что в задаче 1 ненулевой вклад дает мощность внутренней силы F, которая создает момент FL, приложенный к вращающемуся с угловой скоростью ω_1 телу *1*. В задаче 2 ненулевой вклад дает внешняя сила F, приложенная к нижней педали велосипеда A, имеющей следующую проекцию абсолютной скорости на ось x:

$$\upsilon_{Ax} = \upsilon - \omega_1 L = \upsilon(1-\sigma); \quad \sigma = \mu L/R \tag{1.3}$$

Остальные (как внутренние, так и внешние) силы дают нулевой вклад вследствие отсутствия проскальзывания колес, отсутствия растяжимости приводной цепи и идеальности шарниров в точках O_1, O_2, O_3. Таким образом, мощность определяется выражением

$$W_1 = FL\omega_1 = F\sigma\upsilon \text{ для задачи 1}, \quad W_2 = -F\upsilon_{Ax} = -F\upsilon(1-\sigma) \text{ для задачи 2}$$

Опишем подробнее получение формулы для мощности W_1. Переносим силу F, приложенную к педали A, в точку O_1. В результате получаем силу F, приложенную в точке O_1, и пару сил с моментом FL. Эта система сил приложена к вращающемуся вокруг точки O_1 и движущемуся поступательно вместе с указанной точкой телу *1*. Согласно третьему закону Ньютона, на тело *4* (со стороны которого эта система сил приложена) в точке O_1 действует сила $-F$ и пара сил с моментом $-FL$. Тело *4* не вращается, поэтому мощность последнего момента равна нулю, а две противоположно направленные и приложенные в точке O_1 силы в сумме дают нулевую мощность. Таким образом, ненулевой вклад дает только мощность указанной пары сил, приложенной к вращающемуся с угловой скоростью ω_1 телу *1*, и приходим к приведенному выше выражению для мощности W_1.

Далее, применяя теорему об изменении кинетической энергии, получим

$$a = \sigma F/M_0 \text{ для задачи 1} \tag{1.4}$$

$$a = -(1-\sigma)F/M_0 \text{ для задачи 2} \tag{1.5}$$

Параметры M_0 и σ определены, соответственно, вторым равенством (1.2) и вторым равенством (1.3). Отсюда следует, что в задаче 1 велосипед движется по оси x, против силы F, в задаче 2 при $\sigma \in (0,1)$ (при $\sigma > 1$) велосипед движется против (по) оси x, по направлению (против направления) силы F. Для обычных конструкций велосипедов $r_2 < r_1$ $(\mu < 1)$, $L < R$. Тогда $\sigma \in (0,1)$, и велосипед перемещается по направлению внешней силы F.

Замечания. 1. Похожие задачи о велосипеде (трехколесном) на качественном уровне предлагались на Всесоюзных физических олимпиадах в 1960-х гг. (см. [13], задачи 98 и 106). Как видим, строгое и полное решение достаточно сложно (для школьника), и чтобы дать обоснованное решение задач 1 и 2, нужно обладать физической интуицией.

2. В замечательной книге В.И. Арнольда [14] содержится очерк “Какая сила гонит велосипед вперед?”. Автор прикладывает силу к нижней педали велосипеда назад и показывает, что велосипед будет двигаться вперед. Как видим, этот вывод противоречит ответу задачи 2 (при соблюдении неравенства $0 < \sigma < 1$, выполняющегося для реальных моделей велосипеда). Об этом несоответствии автор настоящей статьи узнал от В.Ф. Журавлёва, что, в частности, побудило автора к написанию настоящей статьи. Может показаться очевидным (см. фигуру), что сила F, создающая приложенный к звездочке момент по часовой стрелке, будет вращать ее также по часовой стрелке. Звездочка, в свою очередь, при помощи цепи заставит колеса велосипеда (в отсутствие проскальзывания) вращаться по часовой стрелке, что приведет к перемещению велосипеда слева направо, т.е., против силы F. Однако необходимо еще учесть момент от сил натяжения цепи, который также приложен к звездочке с педалями. Этот момент может быть направлен против часовой стрелки и быть достаточно большим, чтобы превзойти момент от силы F и заставить звездочку вращаться против часовой стрелки. Это может привести к перемещению велосипеда справа налево, по направлению силы F. Такая ситуация реализуется в случае, когда сила F – внешняя, а параметры велосипеда удовлетворяют условию $\sigma \in (0,1)$. Если же сила F – внутренняя, то, как показано выше, указанная ситуация никогда не может быть реализована, т.е. велосипед будет перемещаться против направления силы F.

2. Общая задача об управлении движением велосипеда в вертикальной плоскости при помощи внутренней или внешней силы *F*, приложенной к нижней педали. *Постановка задачи об определении ускорений.* Сила F, направленная по горизонтали и против оси x (фигура), прикладывается к педали (т.е. к телу *1*) либо как в задаче 1, либо как в задаче 2. Таким образом, эта сила либо внутренняя, либо внешняя. Велосипед в начальный момент $t = 0$ покоится. Требуется определить динамику его движения при достаточно малых $t > 0$ в предположении, что колеса односторонним образом контактируют с шероховатой опорной плоскостью с коэффициентом кулоновского трения f.

Замечания. 1. Использование внутренней силы F указанным выше образом (как и в задаче 1) эквивалентно приложению соответствующего управляющего момента на колесе *2*, что характерно для мотоциклов, где такой момент создается двигателем.

2. Можно считать, что велосипед совершал равномерное неуправляемое движение без проскальзывания колес, а затем велосипедист решил начать управляемое движение указанным выше образом.

3. Односторонний контакт колес с опорной плоскостью позволяет рассматривать известный трюк – движение с отрывом одного из колес от опоры. Не исключается также и ситуация с отрывом обоих колес, но это уже другие задачи.

Основные уравнения кинематики и динамики для движений велосипеда без отрыва колес. Пусть сила F – внутренняя (как в задаче 1). Запишем три уравнения динамики плоского движения велосипеда, учитывая, что центр масс не перемещается по вертикали:

$$a = S_2 + S_3 \quad 0 = -N_2 - N_3 + g \tag{2.1}$$

$$I_1\varepsilon_1 + I_2\varepsilon_2 + I_3\varepsilon_3 = N_2b_2 - N_3b_3 - (S_2 + S_3)h_0 \tag{2.2}$$

Уравнения (2.1) – это уравнения движения центра масс велосипеда по горизонтали и вертикали, а третье – уравнение изменения кинетического момента велосипеда относительно собственного центра масс.

Опишем подробнее, как получается уравнение (2.2). Пусть υ_k – скорость центра масс тела k $(k = 1,2,3,4)$. Ясно, что $\upsilon_k = \upsilon$, где υ – скорость центра масс велосипеда, которая направлена по оси x. Пусть Cxy – система координат Кёнига (C – центр масс велосипеда), а m_k и y_k – масса и вертикальная координата центра масс тела k в системе Cxy. Тогда для производных по времени от кинетических моментов тел относительно их общего центра масс C получим

$$\dot{K}_i = I_i\varepsilon_i + m_iay_i, \quad i = 1,2,3; \quad \dot{K}_4 = m_4ay_4$$

Суммируя эти выражения и используя равенство

$$m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4 = 0$$

получим левую часть уравнения (2.2). Правая часть получается стандартным образом.

Запишем уравнения для изменений кинетических моментов тел *1*, *2* и *3* по отдельности относительно их собственных центров масс, учитывая, что к телу *1* приложены силы натяжения цепи T_1 и T_2, а к телу *2* – эти же силы с обратными знаками. Получим

$$I_1\varepsilon_1 = FL + Tr_1, \quad I_2\varepsilon_2 = -S_2R - Tr_2, \quad I_3\varepsilon_3 = -S_3R \tag{2.3}$$

Далее запишем кинематическое уравнение, которое следует из условия отсутствия растяжимости приводной цепи между звездочкой *1* и звездочкой колеса *2*:

$$\varepsilon_1r_1 = \varepsilon_2r_2 \tag{2.4}$$

Использование уравнений (2.3) позволяет записать уравнение (2.2) в виде

$$N_3b_3 - N_2b_2 + (S_2 + S_3)h + T(r_1 - r_2) + FL = 0; \quad h = h_0 - R \tag{2.5}$$

Исключая из полученных уравнений T и ε_1, получим следующую систему пяти уравнений:

$$\begin{gathered} a = S_2 + S_3, \quad I_0\varepsilon_2/R = F\sigma - S_2, \quad I_3\varepsilon_3/R = -S_3 \\ N_2 + N_3 = g, \quad N_3b_3 - N_2b_2 + (S_2 + S_3)h + F\sigma Rk_2 + S_2Rk_1 = 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

где введены обозначения

$$I_0 = I_1\mu^2 + I_2, \quad k_1 = I_1\mu(\mu - 1)/I_0, \quad k_2 = (I_1\mu + I_2)/I_0 \tag{2.7}$$

а параметр σ определен последним равенством (1.3).

Если сила F – внешняя (как и в задаче 2), то несложно показать, что вместо системы (2.6) получаем систему, отличающуюся от (2.6) наличием слагаемого $-F$ в первом уравнении и $-F(L + h)$ в последнем.

В системе (2.6) S_j, N_j, ε_j, $(j = 2,3)$ и a – неизвестные, подлежащие определению (в обеих задачах, как для внутренней, так и для внешней силы F).

Таким образом, для корректного и однозначного решения системы (2.6) или аналогичной системы в случае внешней силы F' необходимо иметь еще два уравнения, которые получаются дополнительно из физических соображений, следующих из предполагаемого возможного движения велосипеда.

Приведем дополнительные уравнения в разных случаях таких возможных движений:

оба колеса *2* и *3* не проскальзывают:

$$a = \varepsilon_j R, \quad j = 2,3$$

колесо *2* (колесо *3*) проскальзывает, а колесо *3* (колесо *2*) не проскальзывает:

$$a = \varepsilon_{5-j} R, \quad S_j = -f N_j \operatorname{sign} a_j, \quad a_j = a - \varepsilon_j R, \quad j = 2 \quad (j = 3)$$

оба колеса *2* и *3* проскальзывают:

$$S_j = -f N_j \operatorname{sign} a_j, \quad j = 2,3$$

Перед тем как излагать решения соответствующих уравнений динамики в перечисленных четырех случаях, рассмотрим вопрос о возможности статического равновесия велосипеда при указанном приложении внутренней или внешней силы F к педали и наличии только сил трения покоя в точках контакта колес. Покажем, что для велосипеда (точнее, для совокупности твердых тел, составляющих велосипед с велосипедистом или без, в зависимости от рассматриваемой задачи) такое равновесие невозможно ни при какой ненулевой силе F, если отсутствуют моменты трения качения на его колесах. Действительно, если сила F внутренняя, то уравнения статического равновесия имеют вид

$$\begin{gathered} S_2 + S_3 = 0, \quad N_2 + N_3 - g = 0, \quad N_2 b_2 - N_3 b_3 - (S_2 + S_3) h = 0 \\ FL + T r_1 = 0, \quad -S_2 R - T r_2 = 0, \quad -S_3 R = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что $S_2 = S_3 = 0$, $T = 0$, $F = 0$, т.е. равновесие возможно лишь при нулевой силе F. Если сила F – внешняя, то в левую часть первого уравнения (2.8) добавляется слагаемое $-F$, а в левую часть третьего – слагаемое $F(L + h)$. Из этих уравнений следует, что $S_3 = 0, S_2 = F, T = -FL/r_1, T = -FR/r_2$. Последние два равенства возможны только в случае $L = R r_1 / r_2$. Для реального велосипеда $r_1 > r_2$ и поэтому $L > R$, т.е., педаль упирается в опорную плоскость. Таким образом, и здесь статическое равновесие невозможно. Отметим, что аналогичный вывод справедлив также тогда, когда сила F наклонна к горизонту.

Замечание. В задачнике ([15], с. 81) приведено ошибочное решение для случая, когда сила F внешняя. Источник ошибки – априори сделанное предположение, что система тел, составляющих велосипед, находится в равновесии. На основании этого рассмотрены три уравнения равновесия для всей системы в целом как абсолютно твердого тела. Однако эти уравнения – следствие указанного предположения и не могут быть критерием для сохранения статического равновесия рассматриваемой системы тел. Как видим, более подробный анализ, учитывающий специфику рассматриваемой системы твердых тел, приводит к невозможности статического равновесия велосипеда при любой силе F, как внутренней, так и внешней.

3. Формулировка результатов для случая внутренней силы *F*. В этом разделе сформулируем результаты, которые получаются при приложении к педали велосипеда внутренней силы F (как и в задаче 1 из разд. 1) для четырех случаев, указанных выше. Везде далее, если не оговорено иное, предполагается, что

$$\mu = 1 \ (r_1 = r_2), \quad b_2 = b_3 = b$$

Кроме того, для упрощения формул предположили, что $M = 1$ (т.е. общая масса велосипеда с велосипедистом выбрана в качестве единицы измерения массы).

Введем следующие (уже безразмерные) обозначения:

$$M_0 = 1 + M_2 + M_3,\quad M_1 = 1 + M_2,\quad M_2 = (I_1 + I_2)/R^2,\quad M_3 = I_3/R^2$$
$$b_0 = f(h + M_0 R),\quad b_1 = fh(2M_1),\quad b_{11} = f(h + M_1 R)$$
$$\xi_1 = fg\frac{M_0}{2(1 + M_3) - b_0/b},\quad \xi_2 = fg\frac{M_0}{2M_3 + b_0/b},\quad \xi_3 = fg\frac{M_1 b}{b_{11}}$$
$$\xi_4 = fg\frac{\eta}{2\eta - f(1 + 2M_2)R},\quad \xi_5 = g\frac{\eta}{(1 + 2M_3)R},\quad \xi_6 = g\frac{\eta}{R},\quad \eta = b - fh \tag{3.1}$$
$$a_{21} = fg\frac{2b + fR}{b_{11}}\left(\frac{b}{2b + fR} - \frac{M_3 b s_1}{2M_3 b + b_0}\right),\quad a_{22} = fg\frac{2b + fR}{2M_3 b + b_0}\left(\frac{b}{2b + fR} + \frac{M_3 b s_2}{b_{11}}\right)$$
$$a_{31} = f\frac{gb + F\sigma R}{2(1 + M_3)b - fh},\quad a_{41} = f\frac{F\sigma R}{\eta},\quad s_1 = \frac{F\sigma - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3},\quad s_2 = \frac{F\sigma - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2}$$

Утверждение 1. При движении велосипеда без проскальзывания обоих колес выполняются следующие условия:

если $b_0 < b$, то $0 < F\sigma < \xi_1$; если $b \le b_0$, то $0 < F\sigma < \xi_2$.

Ускорение $a = a_{11}$ центра масс велосипеда в этом случае дается формулой (1.4).

Утверждение 2. Для реализации движения велосипеда с проскальзыванием только переднего колеса *3* (колесо *3* проскальзывает вперед) выполняются следующие условия (в каждом из рассматриваемых случаев в скобках указано соответствующее ускорение a центра масс велосипеда):

если $0 < b < b_1$, то $\xi_3 < F\sigma < \xi_2$ $(a = a_{21} > 0)$,

если $b_1 \le b < b_{11}$, то $\xi_2 < F\sigma < \xi_3$ $(a = a_{22} > 0)$,

если $b_{11} \le b < b_0$, то $\xi_2 < F\sigma < \xi_4$ $(a = a_{22} > 0)$,

если $b > b_0$, то это движение невозможно.

Утверждение 3. При движении велосипеда с проскальзыванием только заднего колеса *2* (колесо *2* проскальзывает назад) выполняются следующие условия:

$b > b_0$, $\xi_1 < F\sigma < \xi_5$ $(a = a_{31} > 0)$,если $b < b_0$, то это движение невозможно.

Утверждение 4. При движении велосипеда с проскальзыванием обоих колес (колесо *2* при этом проскальзывает назад, а колесо *3* — вперед) выполняются следующие условия:

если $b_{11} < b < b_0$, то $\xi_4 < F\sigma < \xi_6$ $(a = a_{41} > 0)$,

если $b_0 < b < +\infty$, то $\xi_5 < F\sigma < \xi_6$ $(a = a_{41} > 0)$,

если $0 < b < b_{11}$, то это движение невозможно.

Обоснование приведенных утверждений приведено в разд. 4.

Объединение утверждений 1—4 приводит к следующему утверждению.

Утверждение 5. Если $0 < b < b_1$, $\xi_3 < F\sigma < \xi_2$, то происходит движение либо без проскальзывания обоих колес, либо с проскальзыванием переднего колеса (неоднозначность). Во всех остальных случаях движение однозначное в соответствии с результатами утверждений 1—4 или происходит нарушение односторонней связи для переднего колеса.

Замечания. 1. Из утверждения 5 следует, что при выполнении определенных условий движение неоднозначное (парадокс Пэнлеве). Реализующееся движение велосипеда зависит от предыстории его движения. Подробно такие вопросы обсуждаются в статьях автора [16, 17].

2. Нарушение (ослабление) односторонней связи для переднего колеса велосипеда происходит при достаточно большой силе F. В этом случае нормальная реакция на

переднем колесе становится отрицательной. Дальнейшие движения велосипеда с возможными отрывами переднего колеса должны быть рассмотрены в отдельной задаче.

3. Если $f \to \infty$, то реализуются лишь случаи утверждений 1 и 2, из которых, в частности, следуют результаты решения задачи 1 из разд. 1 для движения велосипеда без проскальзывания колес. Однако неоднозначность (т.е. дополнительная возможность движения с проскальзыванием переднего колеса) при некоторых значениях силы F сохраняется. На это замечание автору указал Ф.Л. Черноусько.

4. Кажется удивительным, что возможны движения велосипеда с проскальзыванием переднего (ведомого) колеса. Ведь к этому колесу не приложено никаких моментов. Однако необходимо принять во внимание, что в центре переднего колеса действует горизонтальная сила реакции от рамы велосипеда. Именно эта сила и может в некоторых ситуациях вызывать проскальзывание переднего колеса. Такого типа задача для одного колеса с приложенной в его центре горизонтальной силой приведена в задачнике И.В. Мещерского (см. [18], задача 35.4). Имеется полное решение этой задачи [19].

4. Обоснование результатов разд. 3. *Доказательство утверждения* 1. Решение системы уравнений (2.5) с соответствующими дополнительными уравнениями и обозначениями из (3.1) приводит к формулам

$$a = \frac{F\sigma}{M_0}, \ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{F\sigma}{M_0 R}$$

$$S_2 = \frac{F\sigma(1 + M_3)}{M_0}, \quad S_3 = -\frac{F\sigma M_3}{M_0} \tag{4.1}$$

$$N_{2,3} = \frac{gb_3 \pm F\sigma d}{2b}, \ d = R + \frac{h}{M_0}$$

Для корректной реализации рассматриваемого движения необходимо обеспечить соблюдение неравенств односторонних связей $N_2 > 0, N_3 > 0$, а также неравенств Кулона $|S_2/N_2| < f$ и $|S_3/N_3| < f$ для сил трения покоя S_2 и S_3. Использование этих неравенств совместно с соотношениями (4.1) и обозначениями (3.1) приводит к результатам утверждения 1.

Доказательство утверждения 2. Решение системы уравнений (2.5) с соответствующими дополнительными уравнениями и учетом обозначений (3.1) приводит к формулам

$$a = \frac{F\sigma - fN_3\delta_3}{M_1}, \ \ S_2 = \frac{F\sigma + fN_3\delta_3 M_2}{M_1}, \ \ \delta_3 = \operatorname{sign} a_3 \tag{4.2}$$

Тогда нетрудно подсчитать, что

$$a_3 = \frac{F\sigma}{M_1} - fN_3\delta_3\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_3}\right) \tag{4.3}$$

откуда следует, что значение $\delta_3 = -1$ не может быть реализовано, так как в этом случае, при условиях $N_3 > 0, \ F > 0$, получаем заведомо $a_3 > 0$, что приводит к противоречию при $\delta_3 = \operatorname{sign} a_3$.

Итак, возможно лишь $\delta_3 = +1, \ \ a_3 > 0$, т.е. переднее колесо может проскальзывать лишь вперед, по ходу движения, вдоль оси x. Тогда получим

$$N_2 = \frac{g(b - fd_0) + F\sigma d_1}{q}, \quad N_3 = \frac{gb - F\sigma d_1}{q}; \quad q = 2b - fd_0, \quad d_0 = \frac{h}{M_1}, \quad d_1 = R + d_0 \tag{4.4}$$

Используя неравенство $a_3 > 0$ и неравенство Кулона для S_2 и N_2, из формул (4.2)–(4.4) получим

$$N_2 > 0, \quad N_3 > 0, \quad fN_3M_0/M_3 < F\sigma < fN_2M_1 - fN_3M_2 \tag{4.5}$$

N_2 и N_3 определяются формулами (4.4).

Тогда из соотношений (4.4) и (4.5) следуют неравенства

$$fM_0\frac{gb - F\sigma d_1}{M_3q} < F\sigma < f\frac{g(b - fh) + D\sigma d_1(M_1 + M_2)}{q}, \quad 0 < \frac{gb - F\sigma d_1}{q} < g \tag{4.6}$$

Отсюда получаем при $q > 0$

$$F\sigma > fg\xi_2, \ \ F\sigma\left[2(b - fh) - fR(M_1 + M_2)\right] < fg(b - fh), \ \ \frac{g(fd_0 - b)}{d_1} < F\sigma < \frac{gb}{d_1} \tag{4.7}$$

Величина ξ_2 дается вторым равенством третьей строки формул (3.1). Если $q < 0$, то в соотношениях (4.7) все знаки неравенств нужно заменить на противоположные.

Для решения полученных неравенств (4.7) введем, используя обозначения (3.1), следующие функции параметра b:

$$F_k(b) = \xi_k, \quad k = 1,2,3 \tag{4.8}$$

Эти функции ограничивают, в соответствии с неравенствами (4.7), сверху и снизу величину $F\sigma$, в зависимости от значения параметра $b \in (0,+\infty)$, при $b = b_1$ они принимают одно и то же значение

$$F_0 = fg\frac{h}{2(M_1R + h)}$$

Анализ неравенств (4.7) с использованием функций (4.8) и их элементарных свойств, приводит к результатам утверждения 2.

Доказательство утверждения 3. Решение системы уравнений (2.5) с соответствующими дополнительными уравнениями и обозначениями (3.1) приводит к формулам

$$a = -fN_2\delta_2/(1 + M_3), \ \ \varepsilon_2R = (F\sigma + fN_2\delta_2)/M_2, \quad (\delta_2 = \operatorname{sign} a_2)$$

из которых получим равенство

$$a_2 = -\frac{F\sigma}{M_2} - fN_2\delta_2\left(\frac{1}{M_2} + \frac{1}{1 + M_3}\right) \tag{4.9}$$

Отсюда при $\delta_2 = 1$ приходим к противоречию, так как тогда при $N_2 > 0, \ F > 0$ заведомо будет $a_2 < 0$. Таким образом, имеем $\delta_2 = -1, \ a_2 < 0$ (заднее колесо *2* может проскальзывать только назад, против направления оси x) и из соотношения (4.9) получим

$$F\sigma > fN_2\frac{M_0}{1 + M_3} \tag{4.10}$$

Кроме того, неравенство Кулона для силы S_3 приводит к соотношению

$$N_2M_3 < N_3(1 + M_3) \tag{4.11}$$

Далее, несложные выкладки приводят к формулам для нормальных реакций

$$N_2 = \frac{gb + F\sigma R}{2b - f\Delta}, \ \ N_3 = \frac{gb - gf\Delta - F\sigma R}{2b - f\Delta}, \ \ \Delta = \frac{h}{1 + M_3} \tag{4.12}$$

Для реализации рассматриваемого движения необходимо еще добавить неравенства $N_2 > 0,\ N_3 > 0$, что при учете формул (4.12) приводит к двойному неравенству

$$0 < \frac{gb + F\sigma R}{2b - f\Delta} < g \tag{4.13}$$

Таким образом, для реализации рассматриваемого движения необходимо соблюдения неравенств (4.10), (4.11) и (4.13) при учете формул (4.12). В результате несложных выкладок получаем неравенства утверждения 3.

Доказательство утверждения 4. Решение системы уравнений (2.5) с соответствующими дополнительными уравнениями и обозначениями (3.1) приводит к формулам

$$a_2 = -\frac{F\sigma}{M_2} - fN_2\delta_2\left(1 + \frac{1}{M_2}\right) - fN_3\delta_3, \quad a_3 = -fN_2\delta_2 - fN_3\delta_3\left(1 + \frac{1}{M_3}\right) \tag{4.14}$$
$$\delta_2 = \operatorname{sign} a_2, \quad \delta_3 = \operatorname{sign} a_3$$

Несложный анализ формул (4.14), с учетом неравенств $N_2 > 0,\ \ N_3 > 0,\ \ F > 0$, приводит к выводу, что непротиворечивым является только набор $\delta_2 = -1, \delta_3 = +1$, при котором должны соблюдаться неравенства $a_2 < 0,\ \ a_3 > 0$. Таким образом, здесь заднее колесо скользит назад, а переднее – вперед. Тогда из соотношений (4.14) получим неравенства

$$F\sigma > fN_2(1 + M_2) - fN_3M_2, \quad N_2 > N_3\left(1 + \frac{1}{M_3}\right) > 0 \tag{4.15}$$

Несложные выкладки приводят к следующим выражениям для нормальных реакций:

$$N_2 = \frac{g\eta + F\sigma R}{2\eta} > 0, \quad N_3 = \frac{g\eta - F\sigma R}{2\eta} > 0 \tag{4.16}$$

и неравенства (4.15) приобретают вид

$$F\sigma > f\frac{g\eta + F\sigma R}{2\eta} + fM_2\frac{2F\sigma R}{2\eta}, \quad \frac{2F\sigma R}{2\eta} > \frac{1}{M_3}\frac{g\eta - F\sigma R}{2\eta} \tag{4.17}$$

Параметр η определен последним равенством в четвертой строке формул (3.1). Рассматривая два случая: $\eta > 0$ и $\eta < 0$, из неравенств (4.16) и (4.17) получим результаты утверждения 4.

Автор благодарит Ф.Л. Черноусько и всех участников руководимого им семинара за конструктивное обсуждение результатов и В.Ф. Журавлёва за постоянное внимание к работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. 1960. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит., 487 с.
2. *Охоцимский Д.Е., Мартыненко Ю.Г.* Новые задачи динамики и управления движением мобильных колесных роботов // Успехи мех. 2003. Т. 2. № 1. С. 3–47.
3. *Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М.* К теории управления моноциклом // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 569–583.
4. *Черноусько Ф.Л.* Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 915–941.
5. *Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакшев С.А., Нестеров С.В.* Управление движением неоднородного цилиндра с подвижными внутренними массами по горизонтальной плоскости // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 942–958.

6. *Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю.* Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс // ПММ. 2008. Т. 72. № 2. С. 216–229.
7. *Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 3–22.
8. *Лаврентьев М.А., Лаврентьев М.М.* Об одном принципе создания тяговой силы для движения // ПМТФ. 1962. № 4. С. 3–9.
9. *Козлов В.В., Рамоданов С.М.* О движении изменяемого тела в идеальной жидкости //ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 592–601.
10. *Черноусько Ф.Л.* О перемещении тела в жидкости за счет колебаний присоединенного звена // Докл. РАН. 2010. Т. 431. № 1. С. 46–49.
11. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. 1977. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. Изд-во Наука, 1977. 432 с.
12. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. Изд. 3-е, перераб. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
13. *Слободецкий И.Ш., Орлов В.А.* Всесоюзные олимпиады по физике: Пособие для учащихся 8–10 кл. сред. школы. М.: Просвещение, 1982. 256 с.
14. *Арнольд В.И.* Математическое понимание природы: очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора). М.: МЦНМО, 2009. 144 с.
15. *Gnädig P., Honyek G., Riley K.* 200 Puzzling Physics Problems with Hints and Solutions. Cambridge: University Press, 2002 = *Гнэдиг П., Хоньек Д., Райли К.* Двести интригующих физических задач. (Избранные задачи международных олимпиад.) М.: Бюро Квантум. Техносфера. 2005. 272 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 90.)
16. *Розенблат Г.М.* О движении плоского твердого тела по шероховатой прямой // Нелин. дин. 2006. Т. 2. № 3. С. 293–306.
17. *Розенблат Г.М.* К постановке задач в динамике несвободного движения твердого тела и парадоксы Пэнлеве // Вестник Удмурт. ун-та. Мат. мех. компьют. науки. 2009. Вып. 2. С. 75–88.
18. *Мещерский И.В.* Задачи по теоретической механике. Учеб. пособие. Изд. 44-е. СПб.: Лань, 2005. 448 с.
19. *Козлова З.П., Паншина А.В., Розенблат Г.М.* Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского: динамика материальной системы. Учеб. пособие под ред. Г.М. Розенблата. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 432 с.

Московский государственный автомобильно-дорожный технический университет, Москва
e-mail: gr51@mail.ru

Поступила в редакцию 13.I.2015